

Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів

1. Ізобарний процес

Ізобарний процес – це процес при сталому тиску (ίσος – “іzos”, грец. – рівний; βάρος – “барос”, грец. – вага).

Для цього процесу відношення об'єму газу до його абсолютної температури для даної кількості речовини є величиною сталою

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$$

Саме в цьому процесі для ідеального газу найпростіше обчислюється робота.

Прикладом ізобарного процесу є процес розширення газу у вертикальному циліндрі закритому легкорухомим поршнем. В цьому випадку, тиск на газ (p), як і тиск газу, буде сталим, адже складатиметься з сталого атмосферного тиску (p_A) та тиску створеного сталою вагомістю поршня ($p_n = \frac{mg}{S}$), де S – площа поперечного перерізу поршня, m – маса поршня.

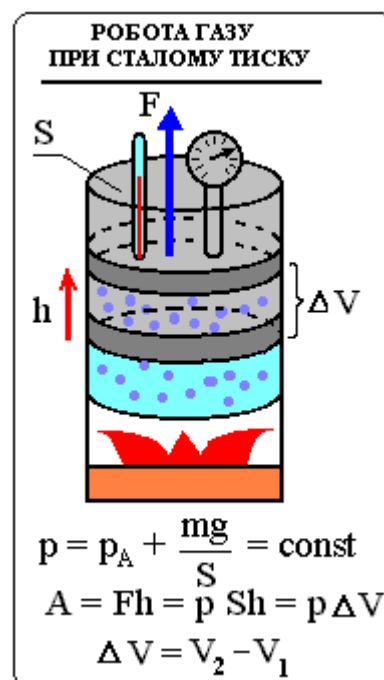
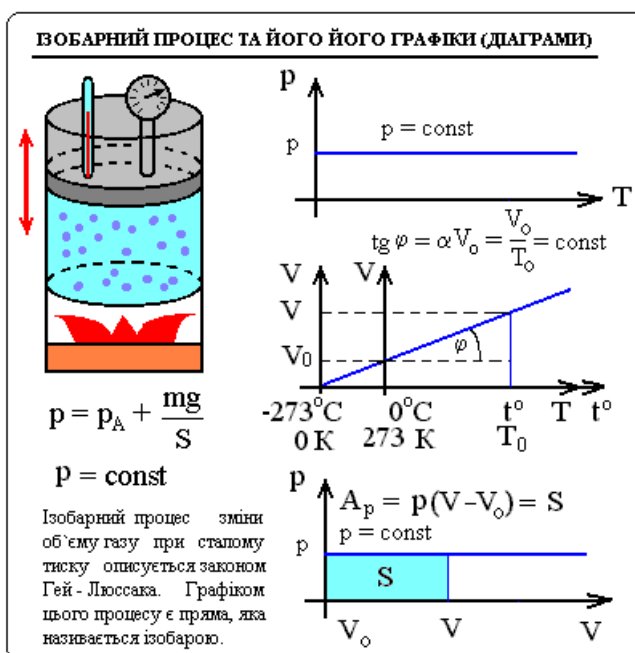
$$p = p_A + \frac{mg}{S} = \text{const.}$$

Очевидно, що сила тиску газу ($F = pS$) також буде також сталою.

За формулою роботи постійної сили, робота газу буде

$$A = Fh = pSh = p(V_2 - V_1).$$

При розширенні газу



Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

$$S h = V_2 - V_1 = \Delta V.$$

Тому робота газу при розширенні

$$A = p \Delta V.$$

При стисненні газу

$$S h = V_1 - V_2 = -\Delta V.$$

Тому робота газу при стисненні

$$A = -p \Delta V.$$

Робота сили зовнішнього тиску на газ (A^l) буде відрізнятися від роботи газу (A) протилежним знаком.

$$A^l = -A.$$

Так як

$$p V = \nu R T,$$

то робота в ізобарному процесі

$$A_p = p V_2 - p V_1 = \nu R T_2 - \nu R T_1 = \nu R \Delta T.$$

Примітка 1. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії при термодинамічному розгляді

При достатньо малому та швидкому стисненні ідеального газу, зовнішня робота (A^l) за першим законом термодинаміки піде на надання додаткової кінетичної енергії молекулам в об'ємі ($\Delta V = V_2 - V_1$, $V_2 \approx V_1$) пройдену поршнем

$$A^l = \Delta E_k.$$

При цьому додатковий тиск на поршень зростає з 0 до p .

Оскільки достатньо малу зміну можна вважати лінійною, то при обчисленні роботи користуватимемося середнім значенням додаткового тиску (p_c) у вигляді

$$p_c = \frac{p}{2}.$$

За формулою роботи при постійному тиску

$$A^l = p_c (V_1 - V_2) = \frac{p}{2} (V_1 - V_2).$$

Зміна кінетичної енергії в об'ємі пройдену поршнем буде рівна добутку числа молекул, енергія яких змінилась, на середнє збільшення енергії однієї молекули

$$\Delta E_k = N_{\varepsilon} \bar{\varepsilon}_k.$$

Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

Врахуємо, що зміниться енергія лише третини молекул з розглядуваного об'єму, так як внаслідок хаотичності по одній з трьох взаємоперпендикулярних осей, що визначають напрямок руху, в будь-який момент рухається однакове число молекул

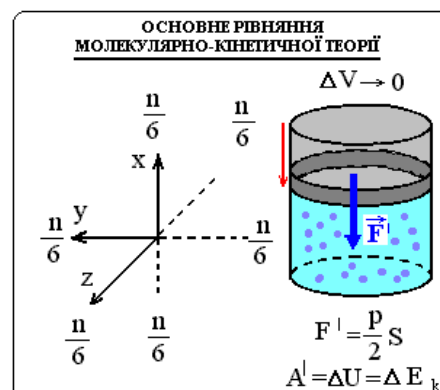
$$N_{\varepsilon} = \frac{1}{3} N = \frac{1}{3} n (V_1 - V_2).$$

Після підстановок матимемо

$$\frac{p}{2} (V_1 - V_2) = \frac{1}{3} n (V_1 - V_2) \bar{\varepsilon}_k.$$

Звідки випливає основне рівняння МКТ

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_k.$$



Примітка 2. Робота газу при змінному тиску

Якщо тиск змінний, то робота наближено знаходиться сумуванням елементарних робіт, тобто робіт на таких частинах загальної зміни об'єму

($\Delta V_i = \frac{\Delta V}{n}$), для яких тиск можна вважати незмінним.

Елементарна робота (A_i) на частковій (елементарній) зміні об'єму (ΔV_i)

$$A_i = p_i \Delta V_i.$$

Графічно елементарна робота зобразиться площею смужки на ($p; V$) діаграмі процесу (див. мал.).

Загальна робота при повній зміні об'єму від V_1 до V_2 буде рівна сумі всіх послідовних елементарних робіт.

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n p_i \Delta V_i.$$

Графічно загальна робота буде рівна сумі площ всіх смужок на ($p; V$) діаграмі.

для обчислення точного значення роботи слід знайти попередню суму при зменшенні часткової зміни об'єму до 0., тобто знайти граничне значення суми при

$\Delta V_i \rightarrow 0$, або при $n \rightarrow \infty$



Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n p_i \Delta V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p_i \Delta V_i.$$

Остання границя є означеним інтегралом, а також площею криволінійної трапеції під графіком процесу.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Кількість теплоти передана при ізобарному процесі за першим законом термодинаміки

$$Q_p = A_p + \Delta U_p = \nu R \Delta T + i/2 \nu R \Delta T.$$

Отже, ця кількість теплоти

$$Q_p = (1 + i/2) \nu R \Delta T,$$

або, з врахуванням рівняння стану,

$$Q_p = (1 + i/2) p \Delta V.$$

Молярна теплоємність при сталому тиску C_{MP} визначиться так

$$C_{MP} = \frac{Q_p}{\nu \Delta T} = \frac{(\frac{i}{2} + 1) \nu \cdot R \Delta T}{\nu \Delta T},$$

$$C_{MP} = (i/2 + 1) R.$$

ТЕПЛОЄМНІСТЬ

Питома теплоємність	Теплоємність (повна)
$c = \frac{Q}{m \Delta T}$	$C = \frac{Q}{\Delta T} = c m$
Молярна теплоємність	
$c_M = \frac{Q}{\nu \Delta T} = c M$	

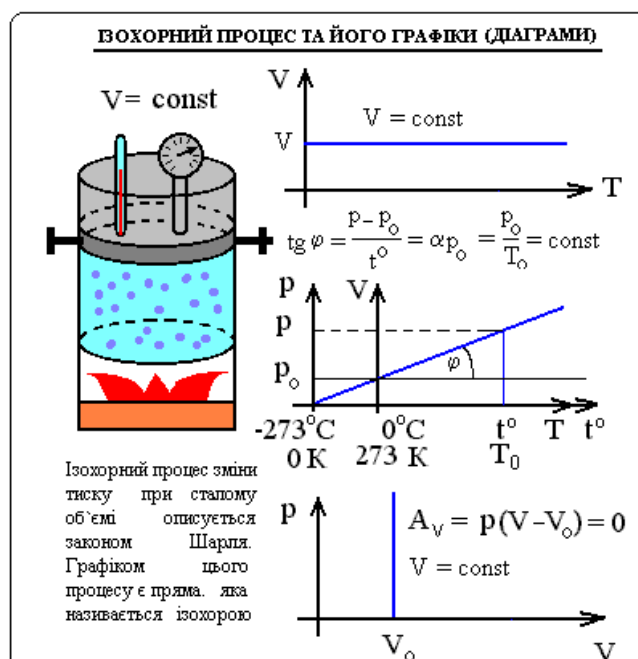
2. Ізохорний процес. Рівняння Майєра

Ізохорний процес – це процес, який відбувається при сталому об'ємі (χόρος – “хорос”, грец. – місце).

Для цього процесу відношення тиску газу до його абсолютної температури для даної кількості речовини є величиною сталою

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}.$$

Такий процес можна здійснити, нагріваючи газ в циліндрі при закріпленому поршні.



Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

Робота в ізохорному процесі не виконується, так як об'єм газу не змінюється

$$\Delta V = 0 \Rightarrow A_v = 0.$$

Зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$$

або

$$\Delta U = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} V (p_2 - p_1) = \frac{i}{2} \Delta p V.$$

Кількість теплоти переданої в цьому процесі за першим законом термодинаміки

$$Q_v = A_v + \Delta U_v = \Delta U_v = \frac{i}{2} R \Delta T.$$

Молярна теплоємність при сталому об'ємі

$$C_{Mv} = \frac{Q_v}{\nu \Delta T} = \frac{i}{2} R$$

Зв'язок молярних теплоємностей ідеального газу при сталому тиску та об'ємі очевидний

$$C_{Mp} - C_{Mv} = R.$$

Останній запис називається *рівнянням Майєра*.

3. Ізотермічний процес

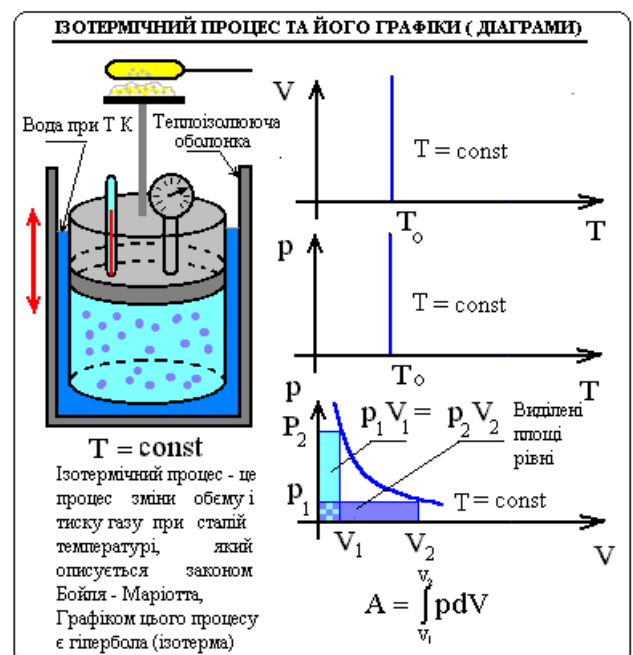
Ізотермічний процес – це процес, який відбувається при сталій температурі (θερμη – “терме” грец. – жар).

Цей процес описується законом Бойля – Маріотта, за яким добуток тиску газу на його об'єм при сталій температурі та кількості речовини, є величиною сталою

$$p V = p_0 V_0.$$

Робота в ізотермічному процесі обчислюється сумуванням робіт на всіх елементарних (скільки завгодно малих) змінах об'єму (ΔV_i). Обираються такі

зміни, на протязі яких тиск можна вважати постійним. Відповідну елементарну роботу можна знайти за формулою роботи ізобарного процесу



Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

$$A_i = p_i \Delta V_i$$

Ця робота графічно зобразиться площею смужки (на рис. червоної). Загальна робота, як сума всіх елементарних робіт, буде рівна площі всіх смужок під графіком, $p = f(V)$, тобто криволінійній трапеції $abcd$.

$$A = A_1 + \dots + A_n = \text{площі } abcd$$

Результат сумування буде точним, якщо число елементарних змін об'єму прямуватиме до нескінченності, а кожна елементарна зміна об'єму – до нуля.

Отже, робота буде рівна граничному значенню суми елементарних робіт за попередніх умов

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n p_i \Delta V_i.$$

Остання сума є означенням інтегралом функції $p = f(V)$, в межах від V_1 до V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

За рівнянням стану ідеального газу

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

тоді, з врахуванням того, що $T = \text{const}$,

$$A_T = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Так як для ізотермічного процесу

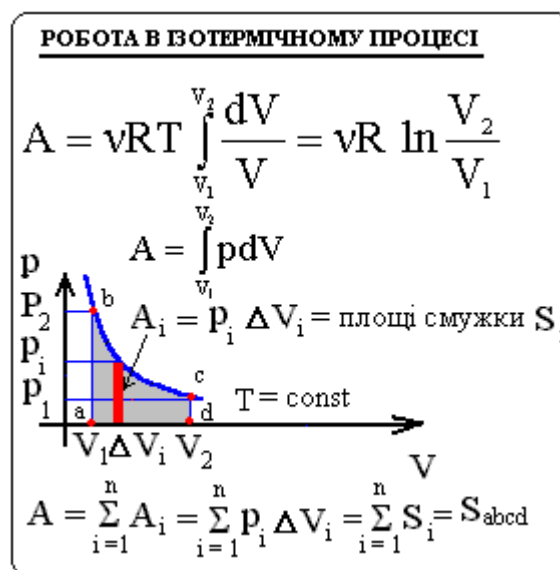
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

то

$$A_T = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Внутрішня енергія в ізотермічному процесі не змінюється.

Дійсно,



Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

$$\Delta U_T = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$$

і, так як в ізотермічному процесі $\Delta T = 0$, то

$$\Delta U_T = 0$$

Кількість теплоти переданої в ізотермічному процесі за I законом термодинаміки:

$$Q_T = A_T + \Delta U_T$$

Оскільки

$$\Delta U_T = 0$$

$$Q_T = A_T.$$

Отриманий результат начебто вказує на можливість повного перетворення теплоти в роботу, а роботи – в теплоту. В дійсності, такий процес здійснити неможливо без змін в оточуючій системі, з причин, що з'ясовуються другим законом термодинаміки.

Теплоємність в ізотермічному процесі нескінченно велика, в зв'язку з тим, що зміна температури рівна нулю.

$$\Delta T = 0 \Rightarrow C_{MT} = \infty$$

4. Адіабатний процес

Адіабатний процес – це процес який відбувається без теплообміну з оточуючим середовищем.

Робота в цьому процесі обчислюється безпосередньо інтегралом

$$A_q = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

або за першим законом термодинаміки

$$Q_q = \Delta U_q + A_q.$$

В зв'язку з теплоізоляваністю системи

$$Q_q = 0,$$

тому зміна внутрішньої енергії рівна роботі з протилежним знаком

$$A_q = -\Delta U_q = -\frac{i}{2} \nu R \Delta T.$$

Оскільки $\frac{i}{2} R = C_{Mv}$,

Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

$$\Delta U_q = \nu C_{MV} \Delta T.$$

На основі попереднього можна записати для елементарних значень

$$p \Delta V = -\nu C_{MV} \Delta T$$

Врахувавши, як і раніше, що

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

отримаємо

$$\nu RT \frac{\Delta V}{V} = -\nu C_{MV} \Delta T$$

або

$$\frac{R}{C_{MV}} \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta T}{T},$$

звідки, після сумування (інтегрування) від початкового значення змінної до кінцевого, отримаємо

$$-\frac{R}{C_{MV}} \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{T_2}{T_1}$$

після зміни знаку перед логарифмом, зміняться місцями V_1 та V_2 . Врешті отримаємо

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{R}{C_{MV}}} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Так як

$$R = C_{MP} - C_{MV}$$

то

$$\frac{R}{C_{MV}} = \frac{C_{MP} - C_{MV}}{C_{MV}} = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} - 1 = \gamma - 1$$

Таким чином

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (TV^{\gamma-1} = \text{const})$$

Отримане рівняння називають рівнянням Пуассона а $\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}}$ – показником адіабати, або коефіцієнтом Пуассона.

Так як за рівнянням стану газу

Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

$$T = \frac{pV}{\nu R},$$

то рівняння Пуассона можна подати у вигляді

$$p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma$$

В зв'язку з відсутністю теплообміну, теплоємність в адиабатному процесі рівна нулю

$$C_{Mq} = 0$$

На (p;V) графіку адиабата йде більш круто ніж ізотерма, адже при зменшенні тиску при розширенні зумовлюється не тільки збільшенням об'єму, а і зменшенням температури.



5. Політропний процес

Політропний процес є процесом, що відбувається при сталій теплоємності

$$C_M = \text{const.}$$

За першим законом термодинаміки для елементарних значень величин

$$Q = A + \Delta U,$$

врахувавши, що

$$Q = \nu C_M \Delta T,$$

$$\Delta U = \nu C_{Mv} \Delta T,$$

$$A = p \Delta V = \frac{\nu RT}{V} \Delta V = \frac{\nu (C_{Mp} - C_{Mv}) T}{V} \Delta V.$$

Після підстановки в рівняння термодинаміки матимемо

$$\nu C_M dT = \frac{\nu T \Delta V}{V} (C_{Mp} - C_{Mv}) + \nu C_{Mv} \Delta T.$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{C_{Mp} - C_{Mv}}{C_M - C_{Mv}}.$$

Введемо показник політропи (n)

Плющай І.І. ТЕРМОДИНАМІКА

$$n = \frac{C_{MP} - C_M}{C_{MV} - C_M}$$

Тоді

$$\frac{C_{MP} - C_{MV}}{C_M - C_{MV}} = n - 1.$$

Тепер

$$\frac{\Delta T}{T} = -(n-1) \frac{\Delta V}{V}.$$

Звідки, після сумування (інтегрування)

$$T_2 V_2^{n-1} = T_1 V_1^{n-1} \quad (TV^{n-1} = \text{const}).$$